УДК 519.853

О ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКЕ МНОГОГРАННИКА ЛЕБЕГОВЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

В.В. Абрамова[1], С.И. Дудов[2]

1 *veronika0322@rambler.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
2 *dudovsi@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Рассматривается задача о вложении в заданный многогранник наибольшего по включению лебегова множества выпуклой функции. Установлены формула производной по направлениям целевой функции данной экстремальной задачи и критерий ее решения.

Ключевые слова: многогранник, внутренняя оценка, производная по направлениям.

Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^p : < A_i, x > +b_i \le 0, i = \overline{1,m}\}$ – многогранник, где $A_i \in \mathbb{R}^p, b_i \in \mathbb{R}$; $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \backslash M}$; $f(x)$ – выпуклая конечная на $\mathbb{R}^p$ функция, имеющая единственную точку минимума $x^* = 0_p$.

Рассматривается задача

$$\varphi(x) \equiv \min_{y\in\Omega} f(y-x) \to \max_{x\in M}. \tag{1}$$

Для фиксированной точки $x \in M$ величина $\alpha = \varphi(x)$ является максимальной, при которой имеет место включение $x + \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \le \alpha\} \subset M$. Таким образом, задача (1) требует вложить в многогранник M наибольшее по включению нижнее лебегово множество функции $f(x)$.

Теорема 1. *Пусть $i \in [1:m]$. Функция $\varphi_i(x) = \min\limits_{x\in\Omega_i} f(y-x)$, где $\Omega_i = \{y \in \mathbb{R}^p : < A_i, y > +b \ge 0\}$, является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, а ее субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ можно выразить формулой:*

$$\partial\varphi_i(x) = -\{\partial f(z-x) \cap K(A_i)\}, \tag{2}$$

где $\partial f(x)$ – субдифференциал функции $f(\cdot)$ в точке x, $K(A_i) = \{v = \alpha A_i : \alpha \ge 0\}$, z– любая точка из $Q_i(x) = \{z \in \Omega_i : \varphi_i(x) = f(z-x)\}$.

Теорема 2. *Функция $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$, причем*

$$\varphi'(x,g) \equiv \lim_{\alpha\downarrow 0} \alpha^{-1}[\varphi(x+\alpha g) - \varphi(x)] = \begin{cases} 0, & \text{если } x \ne M, \\ \min\limits_{i\in I(x)} \max\limits_{v\in\partial\varphi_i(x)} < v, g >, & \text{если } x \in M, \end{cases} \tag{3}$$

где $I(x) = \{i \in [1:m] : \varphi(x) = \varphi_i(x)\}$, а $\partial\varphi_i(x)$ определены формулой (2).

Теорема 3. *Для того чтобы точка $x^* \in intM$ была точкой максимума функции $\varphi(x)$ на M, необходимо и достаточно, чтобы $0_p \in co\{A_i : i \in I(x^*)\}$. Здесь coB – выпуклая оболочка множества B.*

Замечание 1. *Если функция $f(\cdot)$ является нормой, то задача (1) представляет собой задачу о вписанном шаре, и при этом функция $\varphi(x)$ является вогнутой на M (см., например, [1]). Примеры показывают, что функция $\varphi(x)$ может не быть вогнутой на M.*

Замечание 2. *Из формулы (3) вытекает, что семейство множеств $\{\partial\varphi_i(x) : i \in I(x)\}$ является верхним экзостером функции $\varphi(x)$ в точке $x \in M$ (см. [2]).*

Литература

1. Дудов С. И. *Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы* // ЖВМ и МФ. – 1996. – Т. 36. – № 5. – С. 153–159.

2. Демьянов В. Ф., Рощина В. А. *Обобщенные субдифференциалы и экзостеры* // Владикавк. матем. журн. – 2006. – Т. 8. – № 4. – С. 19–31.

ON INNER BOUND OF POLYTOPE BY LEBESQUE SET OF CONVEX FUNCTION

V.V. Abramova, S.I. Dudov

The problem of embedding the largest (by inclusion) of Lebesgue sets of a convex function into a given polyhedron is considered. A formula for the directional derivative of the objective function of this extremal problem and a criterion of its solution are established.

Keywords: polytope, inner bound, directional derivative.

УДК 517.956

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПАРАМЕТРОВ

Н.Р. Абубакиров[1], Л.А. Аксентьев[2]

1 *nail.abubakirov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *leonid.aksentev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В прямых задачах известна область D и требуется определить градиент потенциала вне или внутри этой области. В обратных же задачах известен градиент потенциала в окрестности ∞ и нужно определить область D. Следуя В.К.Иванову [1], продолжим выделение классов областей с конечным числом параметров, которыми характеризуется функция, отображающая единичный круг $E = \{|\zeta| < 1\}$ на область D. Также рассмотрим прямые и обратные задачи для градиента логарифмического потенциала простого слоя с различными типами контуров.

Ключевые слова: логарифмический потенциал, градиент, интегральное уравнение.

§1. Прямые и обратные задачи для градиента потенциала простого слоя

1.1 Градиентом потенциала простого слоя по кривой L будем называть функцию

$$u(z) = \int_L \frac{ds(\tau)}{\tau - z},$$